GUIA DE APRENDIZAJE N° 8–AREA de Matemática 11°

Docente: Fabián Tafur Raad
Periodo: 3
Tema: Límites de Sucesiones
Duración: 22 de octubre -8 de noviembre 2021
Fecha final de revisión: 8 de noviembre 2021.
Lugar de envió: Los talleres se pueden elaborar en grupos virtuales de 2 a 4 estudiantes y enviarlos al WhatsApp 3235960953 o al correo electrónico faeltara07@hotmail.com
Los trabajos los puedes enviar en formato de fotos, documentos Word, PDF, diapositivas o de cualquier forma digital que se te facilite.

Propósito de aprendizaje:

Describir el comportamiento de las sucesiones e identificar características propias de ellas para la toma de decisiones acertadas en los diferentes campos de aplicación.

Evidencias de aprendizaje:

- Identificar una sucesión como una secuencia numérica.

- Caracterizar sucesiones según su tipo y orden.

- Interpretar el comportamiento de las sucesiones para la toma de decisiones según su campo de aplicación.

INTRODUCCIÓN

"Alguien puso en un corral una pareja de conejos recién nacidos con el propósito de averiguar cuántas parejas habrá al cabo de un año. La prolífica naturaleza de estos animalitos indica que cada pareja recién nacida requiere un mes de maduración, durante el cual no se reproduce, pero al finalizar el segundo mes da a luz una nueva pareja, y luego sigue pariendo cada mes otra pareja. ¿Cuántas parejas habrá al término de un año, suponiendo que ningún conejo muere en esta feliz experiencia?"

La solución que dio Fibonacci fue que **cada mes habría las mismas parejas de conejos que ya había el mes anterior (se suponía que no había muerto ninguno) más un número nuevo de parejas igual al número de parejas fértiles, que son las que ya había 2 meses antes.** Si escribimos una serie con el número de parejas que hay cada mes, obtenemos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,144……….

Así, el número total de parejas al final del año es de 144 (la que había al principio y otras 143 nuevas).
Esta secuencia recibe el nombre de sucesión de Fibonacci, y cada número es un número de Fibonacci, que resulta de sumar los dos números anteriores.

INDAGACIÓN

Un comerciante vende camisetas a un grupo de estudiantes que están organizando un viaje de estudios. Para ello llama al proveedor para hacer el pedido de las camisetas y éste se las suministra según la función:

$$f(n) = \frac{4.27n + 7.74}{n}$$

Donde n es el número de camisetas vendidas y f(n) el precio en euros por camiseta:

Sabiendo que el comerciante a su vez se las vende a los estudiantes por 8 euros la unidad. ¿Cuál es el beneficio por camiseta según las camisetas vendidas? ¿Cuántas camisetas ha de vender para obtener un beneficio superior a 3'20 euros la unidad? ¿Cuánto cobra el proveedor si el comerciante pide 10.000 unidades?

CONCEPTUALIZACIÓN

En la sucesión $a_n = \frac{n^2-1}{2n^2} = \left\{0, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{15}{32}, \frac{12}{25}, \frac{35}{72}, ..., \frac{99}{200}, ...\right\}$, cuando n crece, los términos se acercan progresivamente a $\frac{1}{2}$. Si se usa la calculadora para hallar la expresión decimal de cada uno de los anteriores términos se puede evidenciar esta tendencia: {0, 0,38, 0,44, 0,47, 0,48, 0,49, ... , 0,495,...}.

Así, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

Álgebra de límites

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se verifica que:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot a;\ k \in \mathbb{R}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, siempre que $b \neq 0$

f. $\lim\limits_{n\to\infty} k^{a_n} = k^a$

g. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

h. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right) = a^b$

i. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$, esto es, el límite de una sucesión constante $a_n = k$ es la misma constante.

Además, si dos sucesiones son divergentes hacia $+\infty$, la sucesión formada por la suma de los términos de ambas también diverge hacia $+\infty$, es decir:

si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$

Ejemplo 1

Observa cómo se aplican las propiedades anteriores para evaluar $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5}$. En este caso no se puede aplicar el límite del cociente puesto que las sucesiones del numerador y del denominador no convergen. Sin embargo se pueden transformar así:

$$\frac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5} = \frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}} \leftarrow \text{Se factorizó } n^2 \text{ y se simplificó.}$$

Al aplicar la propiedad e. se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 4 - \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}} = \frac{3+0+0}{4+0+0} = \frac{3}{4}$$

Indeterminaciones en el cálculo de los límites de una sucesión

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Cuando una sucesión es un cociente de polinomios y resulta la **indeterminación** $\frac{\infty}{\infty}$, su límite se calcula dividiendo tanto el numerador como el denominador entre el término de mayor grado.

Ejemplo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^5-2n}{n^5-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^5}{n^5}-\frac{2n}{n^5}}{\frac{n^5}{n^5}-\frac{n^2}{n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{2}{n^4}}{1-\frac{1}{n^3}} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

Indeterminación $\infty - \infty$

Si dos sucesiones son enteras, se factoriza la potencia de mayor exponente; si son racionales, se llevan a común denominador; y si poseen radicales, se multiplica y divide por el conjugado de la expresión, para verificar la indeterminación o eliminarla.

Ejemplo

- $\lim\limits_{n\to\infty} 3n^6 - 8n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} n^6\left(3 - \dfrac{8}{n^4}\right) = \infty$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n-4} - \frac{n^2}{n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5(n-2) - n^2(n-4)}{(n-2)(n-4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6 - 2n^5 - n^3 + 4n^2}{n^2 - 6n + 8}$$
  $$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^6}{n^6} - \dfrac{2n^5}{n^6} - \dfrac{n^3}{n^6} + \dfrac{4n^2}{n^6}}{\dfrac{n^2}{n^6} - \dfrac{6n}{n^6} + \dfrac{8}{n^6}} = \frac{1}{0} = \infty$$

- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

APLICACIÓN

PRACTICO LO QUE APRENDI

La importancia de las sucesiones en la vida diaria es de gran importancia porque nos permite conocer e identificar muchas características existentes por ejemplo en el crecimiento de la población de animales, humanos, bacterias etc… por lo que se le pide analizar los siguientes videos y realizar una respectiva síntesis de ellos.

a. https://youtu.be/bIW3wls4qr0
b. https://youtu.be/lf6k_zCqo2M

2. de la página 79 del texto guía el ejercicio 4 y la evaluación de aprendizaje.

3. desarrollar la evaluación de aprendizaje hasta el inciso **e**, de la pagina 81.

ESTRATEGIA DE EVALUACIÓN

Entrega y revisión de la Guía de aprendizaje.
Interpretación, planteamiento y solución de ejercicios.
Síntesis de videos.
Participación y Sustentación del trabajo.

AUTOEVALUACIÓN

¿QUÉ APRENDÍ?

¿Qué sabia?	¿Qué he ido aprendiendo?	¿Qué sé ahora?

Valoraciones	
Propuestas de mejora	