	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MADRE LAURA ***HACIA LA TRANSFORMACION CON AMOR*** ***NIT 8060035965- DANE 113001002413***

QUÉDATE EN CASA

GUIA DE APRENDIZAJE N° 4 –AREA de Matemática 11°

Docente: Fabián Tafur Raad
Periodo: 2do
Tema: Funciones Racionales, Exponenciales y Logarítmicas.
Duración: 19 de julio al 5 de agosto
Fecha final de revisión:5 de agosto del 2021.
Lugar de envió: Los talleres se pueden elaborar en grupos virtuales de 2 a 4 estudiantes y enviarlos al WhatsApp 3235960953 o al correo electrónico faeltara07@hotmail.com
Los trabajos los puedes enviar en formato de fotos, documentos Word, PDF, diapositivas o de cualquier forma digital que se te facilite.

Propósito de aprendizaje:

Reconocer las propiedades de las funciones racionales, exponenciales y logarítmicas para modelar fenómenos por medio de ellas.

DBA:

Usa propiedades y modelos funcionales para analizar situaciones y para establecer relaciones funcionales entre variables que permiten estudiar la variación en situaciones intraescolares y extraescolares.

Evidencias de aprendizaje:

- Plantea modelos funcionales en los que identifica el dominio, el recorrido y otras características de las funciones.

- Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.

INTRODUCCIÓN

La palabra "racional" hace referencia a que la función racional es una *razón* o cociente (de dos polinomios); los coeficientes de los polinomios pueden ser números racionales o no.

Las funciones racionales tienen diversas aplicaciones en el campo del análisis numérico para interpolar o aproximar los resultados de otras funciones más complejas, ya que son computacionalmente simples de calcular como los polinomios, pero permiten expresar una mayor variedad de comportamientos.

Por otro lado, el estudio de las funciones exponenciales es atribuido a Jacob Bernoulli 1683, y surgen del análisis cuando una cantidad crece o decae a una tasa de proporcionalidad de su valor actual. Una de esas situaciones es el interés continuamente compuesto.

Si una cantidad principal de 1 gana intereses a una tasa anual de x capitalización mensual, entonces el interés ganado cada mes es $\frac{x}{12}$ veces el valor actual, por lo que cada mes el valor total se multiplica por $\left(1+\frac{x}{12}\right)$ y el valor al final del año es $\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12}$.Si, en cambio, el interés se agrava diariamente, esto se convierte en $\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365}$.

INDAGACIÓN

Se puede encontrar números racionales mayores que un número entero k, de manera que sean cada vez más cercanos a él, calculando $k+\frac{1}{j}$ (con j entero positivo). Cuanto más grande sea j, más cercano a k será el racional construido. ¿Cuántos números racionales se pueden construir cercanos a k y menores que $k+\frac{1}{11}$?

A. 10, que es la cantidad de racionales menores que 11.
B. Una cantidad infinita, pues existen infinitos números enteros mayores que 11.
C. 11, que es el número que equivale en este caso a j.
D. Uno, pues el racional más cercano a k se halla con j = 10, es decir, con k + 0,1.

CONCEPTUALIZACIÓN

Una función $f(x)$ de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$, se llama **función racional**.

El **dominio** de una función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es el conjunto de los números reales para los cuales $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo 1

Las funciones $f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x - 5}$ y $g(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4}$ son funciones racionales. El dominio de cada una se halla determinando los valores de la variable independiente (en este caso x), que anulan el denominador:

- Para f se resuelve la ecuación $x - 5 = 0$, de donde se obtiene que $x = 5$. Luego, $D(f) = \mathbb{R} - \{5\}$.
- Para g se resuelve la ecuación cuadrática $x^2 - 4 = 0$.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 2$$

De lo cual, $D(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Asíntotas

Los valores que no pertenecen al dominio de una función racional definen en ella asíntotas, que son rectas a las que la función se acerca indefinidamente, pero que nunca interseca.

- La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ si $P(a) \neq 0$ y $Q(a) = 0$.
- La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de f si, a medida que $|x|$ se incrementa, el valor de $f(x)$ se aproxima a b.

Ejemplo 2

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función $h(x) = \frac{2}{x-2}$.

En la Figura 2.27 se observa que la gráfica se acerca a la recta $x = 2$, pero nunca llega a tocarla. Con una calculadora se comprueba que, para valores de x mayores pero cercanos a 2, la función crece indefinidamente; por ejemplo, para $x = 2{,}1$ y $x = 2{,}001$, el valor de $h(x)$ es 20 y 2 000, respectivamente.

Por otro lado, para valores de x menores pero cercanos a 2, la función es decreciente; por ejemplo, para $x = 1{,}9$ y $x = 1{,}999$, los valores que toma $h(x)$ son -20 y $-2\,000$, respectivamente.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función $h(x)$ ya que a medida que x crece o decrece indefinidamente, la función se acerca al eje Y, pero nunca llega a tocarlo.

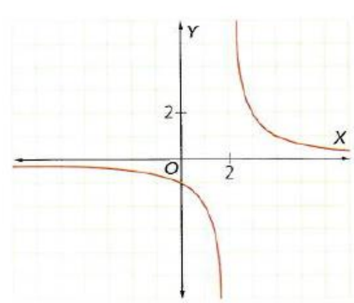

Figura 2.27

Cabe resaltar que para graficar nos apoyaremos con el software Geogebra, INSTALALO en tu celular o computador.

Características de las funciones racionales de la forma $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$

- El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Si n es un número par, el recorrido es $(0, +\infty)$.
- Si n es un número impar, el recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Las funciones $y = \dfrac{1}{x^n}$, con n siendo un número par, son simétricas respecto al eje Y.
- Las funciones $y = \dfrac{1}{x^n}$, con n siendo un número impar, son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- Las rectas $x = 0$ y $y = 0$ son asíntotas, vertical y horizontal, respectivamente.

Ejemplo 3

En la función $f(x) = \dfrac{1}{x^8}$ el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ y el recorrido es $(0, +\infty)$.

Las rectas $x = 0$ y $y = 0$ son asíntotas, vertical y horizontal, respectivamente, para $f(x)$.

$f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^8} = \dfrac{1}{x^8} = f(x)$; luego, $f(x)$ es una función par y simétrica respecto al eje Y.

La Figura 2.28 muestra la gráfica de $f(x)$.

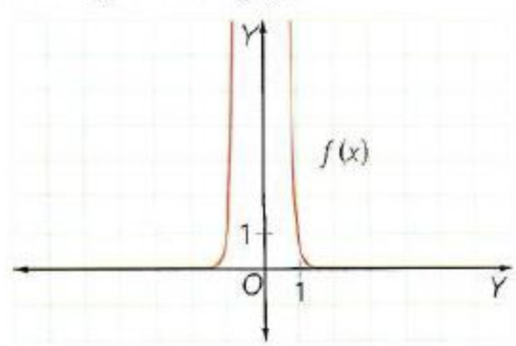

Figura 2.28

Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$

- El dominio de $f(x) = b^x$ es el conjunto de los números reales.
- El rango de $f(x)$ es $(0, +\infty)$.
- El punto de corte de la función $f(x)$ con el eje Y es el punto $(0, 1)$.
- El eje X es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$.
- La función $f(x) = b^x$ vista de izquierda a derecha asciende si $b > 1$, y desciende si $0 < b < 1$.

Ejemplo 1

En la Figura 2.31 se representan las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Para ellas se cumple que:

$D(f) = \mathbb{R} = D(g)$

$R(f) = (0, +\infty) = R(g)$

La intersección de f y g con el eje Y es $(0, 1)$.

f vista de izquierda a derecha asciende, mientras que g desciende.

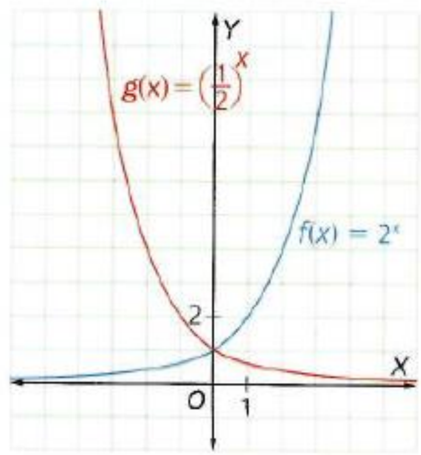

Figura 2.31

Funciones exponenciales de la forma $f(x) = a \cdot b^x$

Las funciones de la forma $f(x) = a \cdot b^x$, con $a \neq 0$, $b > 0$ y $b \neq 1$, son funciones exponenciales, cuyo dominio es el conjunto de los números reales.

El recorrido de $f(x) = a \cdot b^x$ es el intervalo $(0, +\infty)$ si $a > 0$, o el intervalo $(-\infty, 0)$ si $a < 0$. El punto de corte de estas funciones con el eje Y es $(0, a)$.

En la Figura 2.32 se muestran las representaciones gráficas de las funciones $f(x) = 2 \cdot 3^x$ y $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

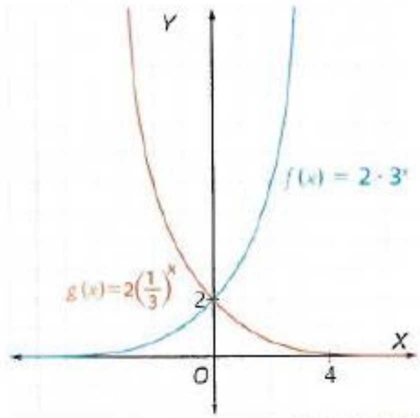

Figura 2.32

El punto de corte con el eje Y de las funciones f y g es $(0, 2)$ y,
$D(f) = \mathbb{R} = D(g)$ y $R(f) = (0, +\infty) = R(g)$.

Función logarítmica

Una función de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a \neq 0$ y $a^{f(x)} = x$, se conoce como **función logarítmica**.

Ejemplo 3

Si $f(x) = \log_2 x$, para hallar el valor de $f(1) = \log_2 1$, se debe encontrar un valor y, tal que $2^y = 1$; este valor es 0, ya que $2^0 = 1$.

Para hallar otros valores de $f(x) = \log_2 x$, se realiza un procedimiento similar.

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{8} = -3,\ f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2,\ f(2) = \log_2 2 = 1.$$

Propiedades de la función logarítmica

- El dominio de la función $f(x) = \log_a x$ es el conjunto de los números reales mayores que 0 y el rango es el conjunto de los números reales.
- Para todo valor $a \neq 0$, $\log_a 1 = 0$; es decir, la intersección con el eje X es el punto $(1, 0)$. La gráfica de la función $f(x) = \log_a x$ no interseca el eje Y.
- El eje Y es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$.
- La gráfica de $f(x)$ vista de izquierda a derecha asciende si $a > 1$, y desciende si $0 < a < 1$.

Ejemplo 4

En la Figura 2.33 se muestran las gráficas de $f(x) = \log_{10} x$, $g(x) = \log_2 x$ y $h(x) = \log_{0,5} x$. Todas ellas se intersecan en $(1, 0)$ y cumplen las demás propiedades mencionadas.

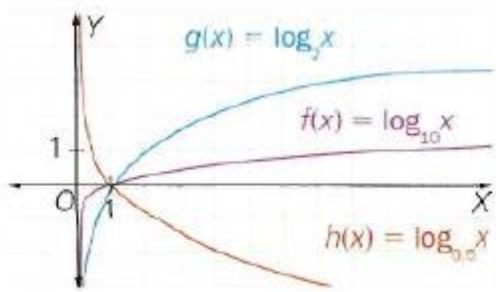

Figura 2.33

APLICACIÓN

PRACTICO LO QUE APRENDI

El análisis de los modelos funcionales es muy importante para el avance y desarrollo de la ciencia y la vida. Por lo que te invito a que veas detenidamente los siguientes videos y de cada uno vas a realizar un buen resumen de cada uno.

a. https://youtu.be/VY-_z-wbWTo
b. https://youtu.be/egHWd_l-gbg
c. https://youtu.be/C0vUje9Uduc

2. Desarrollar los ejercicios 1 y 2 del texto guía, página 44.

3. desarrollar los ejercicios 10, 11 y Educación para sexualidad y la ciudadanía página 45.

4. Desarrollar el ejercicio 5 de la página 48, y de la página 49 los ejercicios11 y 15.

ESTRATEGIA DE EVALUACIÓN

Entrega y revisión de la Guía de aprendizaje.
Interpretación, planteamiento y solución de ejercicios.
Síntesis de videos.
Despeje de incógnitas de una expresión matemática.
Participación y Sustentación del trabajo.

AUTOEVALUACIÓN

¿QUÉ APRENDÍ?

¿Qué sabia?	¿Qué he ido aprendiendo?	¿Qué sé ahora?

Valoraciones	
Propuestas de mejora	